Spatii vectoriale

I. Fie multimile

$D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 2x - y = 0\}$

$D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | 2x - y + 1 = 0\}$

$D_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x - y = 0\}$

$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_1 - 2x_3 = 0\}$;

$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$;

$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_1 - 1 = x_2 + 1 = x_3\}$;

$S_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 = 1\}$;

1) Studiati care dintre aceste multimi sunt subspatii vectoriale in $\mathbf{R}^2$, respectiv $\mathbf{R}^3$.

2) Determinati cate un sistem de generatori pentru subspatiile gasite la 1).

3) Calculati

a) $D_1 + D_3$; $D_1 \cap D_3$; **b)** $S_1 + S_2$; $S_1 \cap S_2$;

II. Fie sistemele de vectori

$U = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 2), u_3 = (0, -1, 2)\}$;

$W = \{w_1 = (1, 1, 2), w_2 = (0, 2, 4)\}$;

$V = \{v_1 = (-3, 1, 5), v_2 = (6, -2, -10)\}$;

1) Determinati $\langle U \rangle$, $\langle W \rangle$, $\langle V \rangle$ si precizati dimensiunile acestora;

2) Calculati

a) $\langle U\rangle + \langle V\rangle$, $\langle U\rangle \cap \langle V\rangle$; **b)** $\langle U\rangle + \langle W\rangle$, $\langle U\rangle \cap \langle W\rangle$;
c) $\langle V\rangle + \langle W\rangle$, $\langle V\rangle \cap \langle W\rangle$ si verificati teorema lui Grassmann.

III. Care din următoarele sisteme de vectori sunt liniar independente şi care formează bază în $\mathbf{R}^3$? Pentru cele linar dependente gasiti relatia de dependenta.

a) $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 2)$, $v_3 = (1, 4, 4)$;

b) $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 2)$;

c) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$;

d) $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 2)$, $v_3 = (1, 1, 1)$;

IV. Determinati subspatiul $U \oplus V \subset \mathbf{R}^3$, unde

$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | 2x_1 - x_2 = 0, 3x_1 - x_3 = 0\}$ si
$V = \langle v_1 = (-1, 2, 1), v_2 = (2, -4, 2)\rangle$.

V. Determinati cate o baza in subspatiile $U + V$ si $U \cap V$ si verificati teorema Grassmann pentru

$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$ si
$V = \langle v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (3, 2, 2)\rangle$.

VI. În $\mathbf{R}^3$ se consideră vectorii $e_1' = (1, 3, 5)$, $e_2' = (6, 3, 2)$, $e_3' = (2, 1, 0)$.
a) Arătaţi că $\{e_1', e_2', e_3'\}$ formeaza o baza in $\mathbf{R}^3$.
b) Găsiţi coordonatele vectorilor $x = (0, 1, 1)$ si $y = (2, 3, 5)$ în baza $\{e_1', e_2', e_3'\}$.

VII. Fie baza $B' = \{e_1' = (1, 1, 0), e_2' = (0, 0, 1), e_3' = (0, 1, 1)\}$. Găsiţi coordonatele vectorului $x = 6e_1' - 5e_2' + 3e_3'$ in baza canonica.

VIII. În $\mathbf{R}^3$ se consideră sistemele de vectori

$$\begin{aligned} B' &= \{e_1' = (1, 1, 0), e_2' = (1, 0, 0), e_3' = (1, 2, 3)\} \\ B'' &= \{e_1'' = (1, 3, 3), e_2'' = (2, 2, 3), e_3'' = (6, 7, 9)\} \end{aligned}$$

a) Arătaţi că B' şi B'' sunt baze şi găsiţi matricea A a schimbării bazelor.

b) Găsiţi coordonatele vectorului $x = 2e_1' + 5e_2' + 7e_3'$ în baza B''.

IX. În $\mathbf{R}^3$ se consideră sistemele de vectori

$$\begin{aligned} B^{'} &= \{e_1' = (1,1,0), e_2' = (1,0,1), e_3' = (1,0,-1)\} \\ B'' &= \{e_1^{''} = (1,0,0), e_2^{''} = (1,1,0), e_3^{''} = (1,1,1)\} \end{aligned}$$

a) Arătaţi că B' şi B'' sunt baze şi găsiţi matricea A a schimbării bazelor.
b) Găsiţi coordonatele vectorului $x = 2e_1 - e_2 + e_3$, (unde e_1, e_2, e_3 sunt vectorii bazei canonice), în bazele B' si B''.